Algorithmen und Datenstrukturen

(Th. Ottmann und P. Widmayer)

Folien: Zusammenfassung

Autor: Bernhard Nebel

Institut für Informatik
Georges-Köhler-Allee
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

1 Überblick

Überblick

Zusammenfassung

Untere Schranke für allgemeine Sortierverfahren

Entscheidungsbäume

Maximale und mittlere Tiefe von Binärbäumen

Beweis der unteren Schranke

2 Zusammenfassung

Name	Schlecht	Durchschn.	in situ	stabil
Bubblesort	$O(n^2)$	$O(n^2)$	ja	ja
Auswahlsort	$O(n^2)$	$O(n^2)$	ja	nein
	wenig Transfers: $O(n)$			
Einfügesort	$O(n^2)$	$O(n^2)$	ja	ja
	als Sub-sort z.B. in Shellsort oder Quicksort			
Shellsort	$O(n \log^2 n)$	$O(n \log^2 n)$	ja	nein
	bei Inkr. von $2^p 3^q$			
Mergesort	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	nein	ja
Quicksort	$O(n^2)$	$O(n \log n)$	nein	nein
	meistbenutzt, viele Varianten,			
Heapsort	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	ja	nein
	$2n \log n$ gegenüber QS: $1.3n \log n$			
Bottom-Up Heaps.	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	ja	nein
Quick-Heapsort	$O(n^2)$	$O(n \log n)$	ja	nein
	$1n \log n$ gegenüber QS: $1.3n \log n$			
Radix-Exchange-Sort	$O(n + S)$	$O(n + S)$	nein	nein

Stabilität $=$ existierende Ordnung zwischen Elementen mit identischen Schlüsseln wird nicht zerstört (abhängig von Vergleichsop.!)

3 Untere Schranke für allgemeine Sortierverfahren

Satz

Zum Sortieren einer Folge von n Schlüsseln mit einem allgemeinen Sortierverfahren (nur Schlüsselvergleiche) sind im Worst-case ebenso wie im Mittel wenigstens $\Omega(n \log n)$ Vergleichsoperationen zwischen zwei Schlüsseln erforderlich.

Modellierung von allgemeinen Sortierverfahren: Entscheidungsbäume.

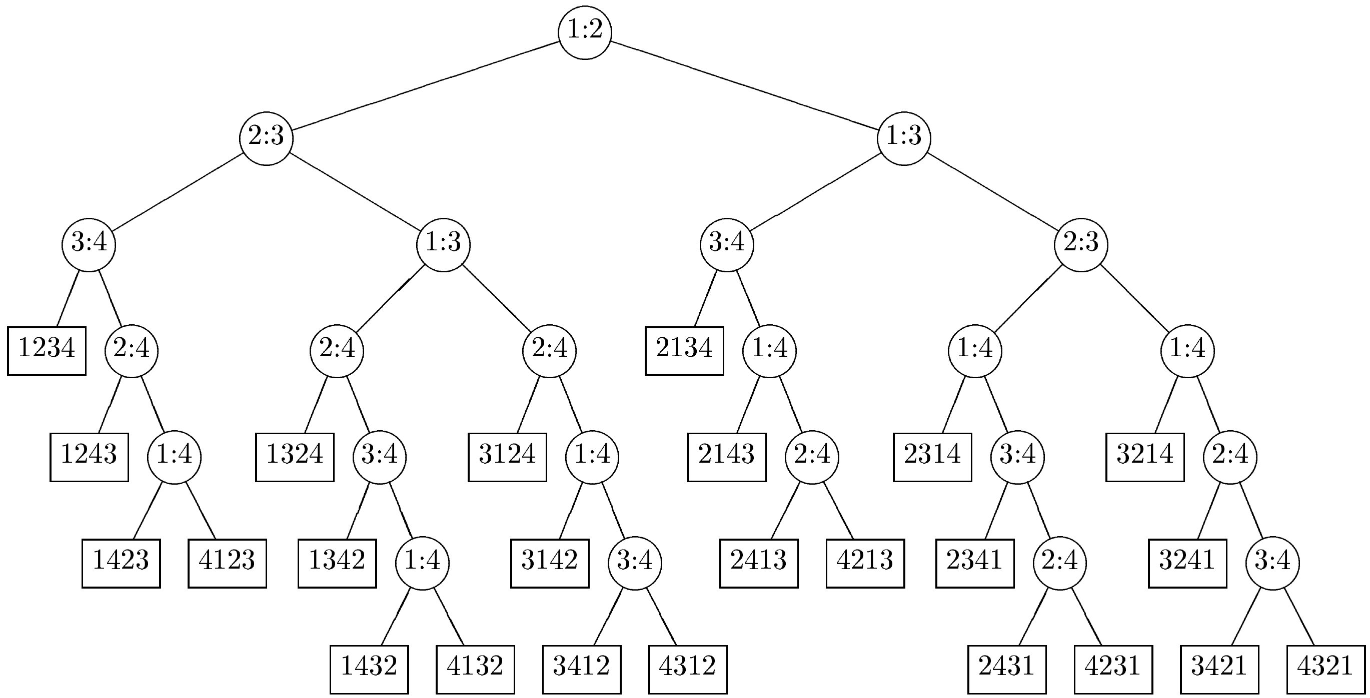
4 Entscheidungsbäume

Sortierverfahren A

Entscheidungsbaum $T_{A,n}$ zur Modellierung des Ablaufs von A auf Folgen der Länge n enthält:

- für jede der n! Permutationen ein Blatt
- innere Knoten repäsentieren eine Vergleichsoperation und haben zwei Söhne
- Weg W von der Wurzel zu einem Blatt v:
  — die Vergleiche an den Knoten von W identifizieren die Permutation π_v von v
  — entsprechen den von A durchgeführten Vergleichen, falls die Eingabe π_v ist
- Längster/mittlerer Weg von der Wurzel zu einem Blatt $=$ max. bzw. mittlere Anzahl von Vergleichen.

Beispiel:
Sortieren durch Einfügen für Folge
$F = < k_1, k_2, k_3, k_4 >$ von 4 Schlüsseln


1:2
2:3
1:3
3:4
1:3
3:4
2:3
1234
2:4
2:4
2:4
2134
1:4
1:4
1:4
1243
1:4
1324
3:4
3124
1:4
2143
2:4
2314
3:4
3214
2:4
1423
4123
1342
1:4
3142
3:4
2413
4213
2341
2:4
3241
3:4
1432
4132
3412
4312
2431
4231
3421
4321

5 Maximale und mittlere Tiefe von Binärbäumen

$\leftarrow \rightarrow \nwarrow$
$\Leftarrow \Rightarrow \downarrow$

(Tiefe eines Knotens $=$ Weglänge von Wurzel)

Satz

Die maximale und die mittlere Tiefe eines Blattes in einem Binärbaum mit k Blättern ist mindestens $\log k$.

Beweis.

1. Maximale Tiefe $\geq \log k$: Sei T ein Binärbaum, dessen Blätter alle die maximale Tiefe t haben. Maximal $k = 1 \leq x \leq 2^t$ Blätter: Offensichtlich: $t \geq \log k$.

2. Mittlere Tiefe $\geq \log k$: Mit Induktion.

6 Beweis der unteren Schranke

Beachte: $n! \geq (n/2)^{n/2}$.

Mit dieser Abschätzung folgt, dass die Entscheidungsbäume (die den Ablauf der Sortieralgorithmen modellieren) eine maximale und mittlere Tiefe von mindestens

$$\log(n!) \geq n/2 \log(n/2) = \Omega(n \log n)$$

haben.