

Einführung in die Informatik

Newton-Verfahren

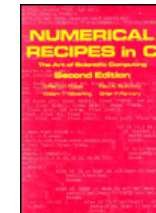
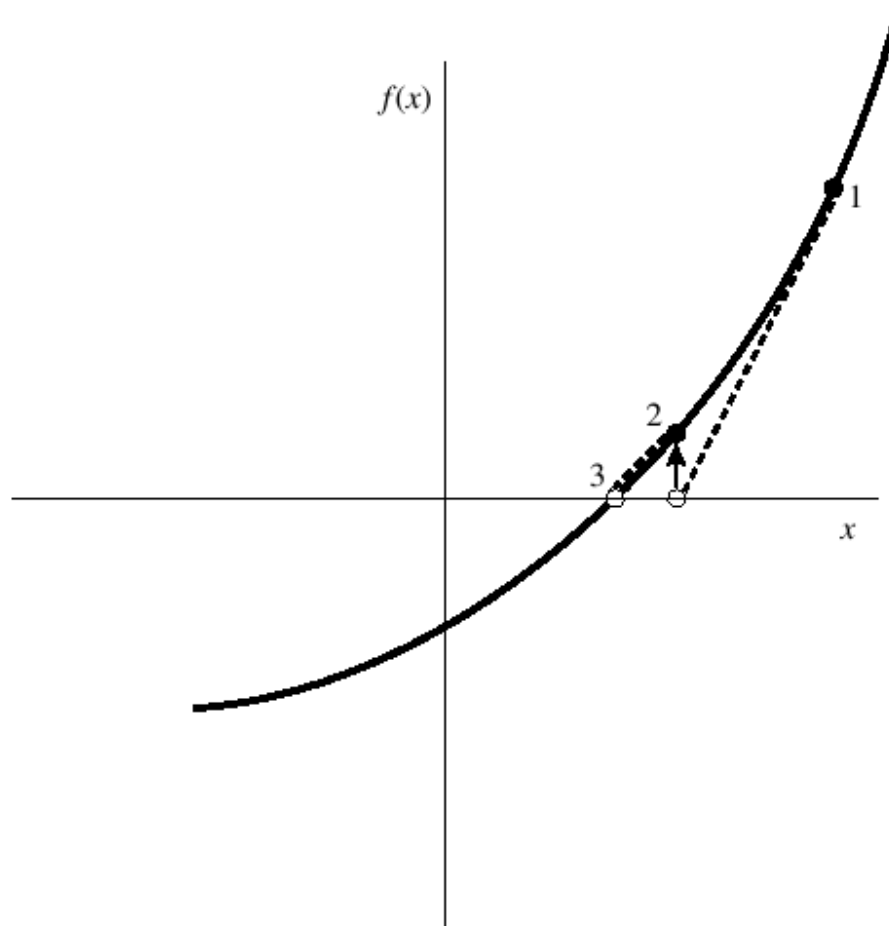
Wolfram Burgard
Cyrill Stachniss

Einführung

- Das Newton oder Newton-Raphson Verfahren ist eine mächtige Technik zum Finden von Nullstellen oder lokalen Extremwerten
- Es zeichnet sich durch „schnelle“ Konvergenz aus (quadratisch)
- Wir betrachten am Beispiel des Newton Verfahren wie schwierig es sein kann, eine einfache Technik korrekt in einer Programmiersprache umzusetzen

Newton Verfahren

- Diese Technik nutzt eine Gerade um eine Nullstelle zu schätzen



Umsetzung

- Man kann dies durch eine einfache rekursive Gleichung ausdrücken

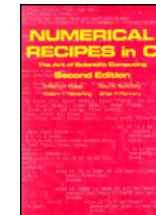
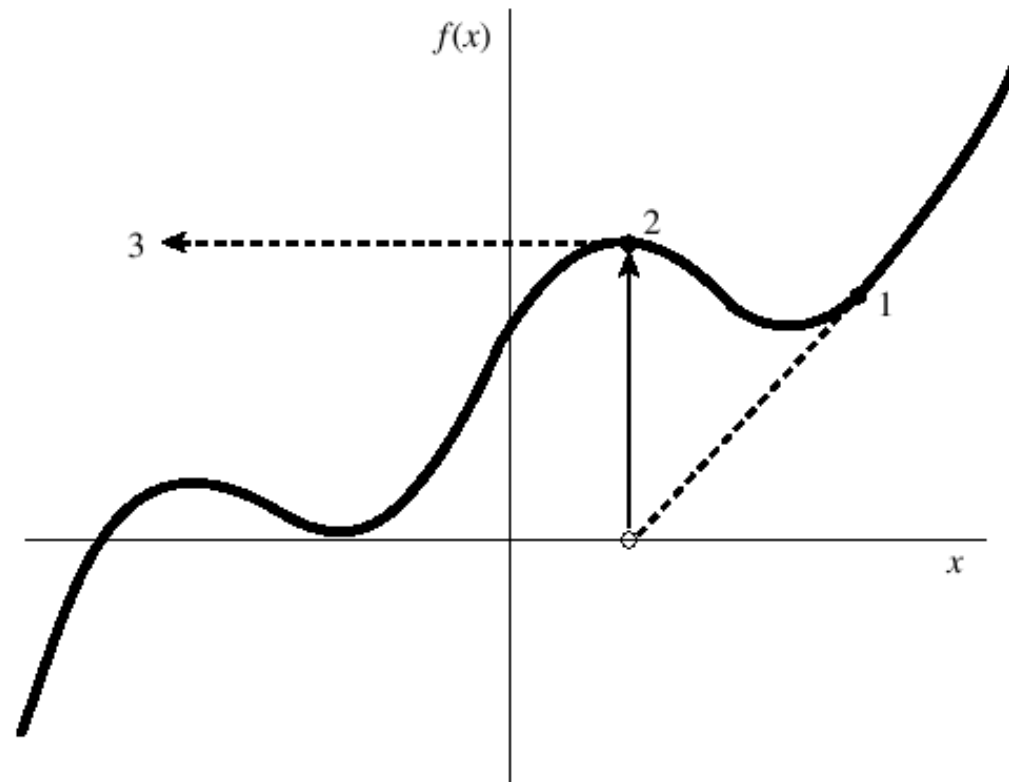
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- und auch einfach in Java umsetzen

```
void newton(Function f, double x, int n) {  
    for (int i=0; i<n; i++) {  
        x = x - f.f(x)/f.df(x);  
    }  
    return x;  
}
```

Probleme

- Ganz so einfach ist dies allerdings in der Praxis nicht, denn
- das Verfahren kann divergieren.



Newton Verfahren mit Konvergenztest

- Durch Test auf Konvergenz kann man diesen Fall umgehen

```
double newton2(Function fkt, double x, double eps) {  
    for (int i=0; i<MAXIT; i++) {  
        double dx = fkt.f(x)/fkt.df(x);  
        x = x - dx;  
        if (Math.abs(dx) < eps) return x;  
    }  
    System.out.println("Maximum number of iterations  
        exceeded");  
    return 0.0;  
}
```

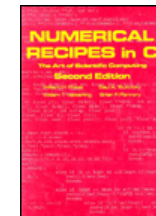
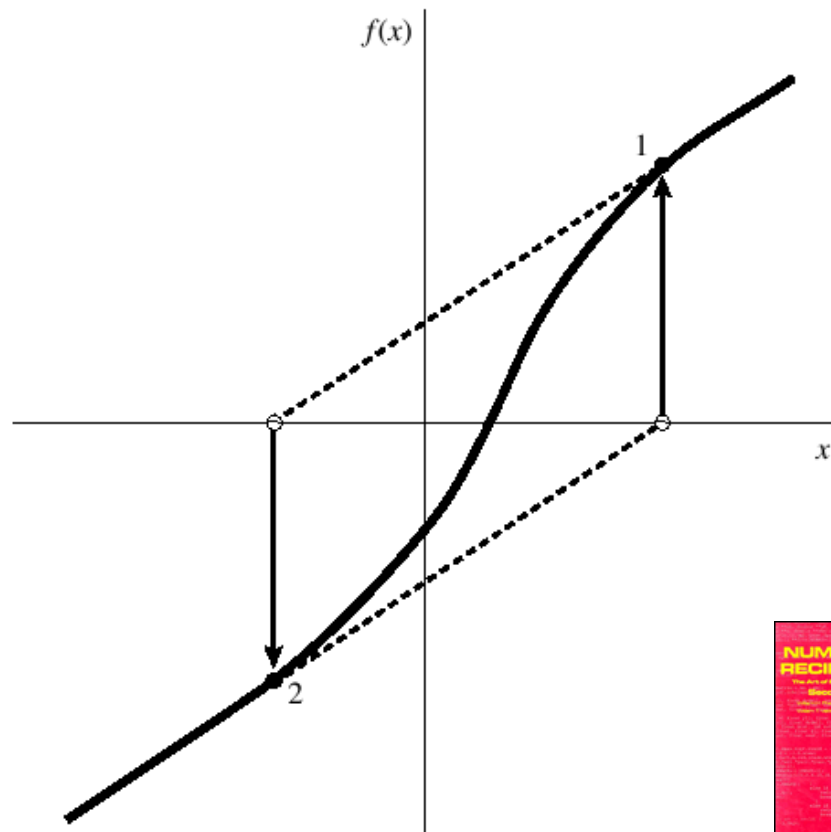
Verbessertes Newton Verfahren

- Auch durch Begrenzung des Newton Verfahrens kann dieser Fall abgefangen werden. Mann muss aber die Begrenzung kennen

```
double newton3(Fkt fkt, double x1, double x2, double eps) {
    double x=0.5*(x1+x2);
    for (int j=0; j<MAXIT; j++) {
        double dx=fkt.f(x)/fkt.df(x);
        x -= dx;
        if ((x1-x)*(x-x2) < 0.0) {
            System.out.println("Jumped out!");
            return 0.0;
        }
        if (Math.abs(dx) < eps) return x;
    }
    System.out.println("Maximum number of iterations
        exceeded");
    return 0.0;
}
```

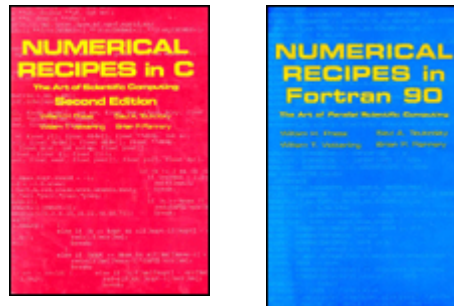
Weitere Probleme

- Trotz Beschränkung muss das Verfahren nicht konvergieren.
- Der Konvergenztest mit der maximalen Anzahl an Iterationen verhindert aber eine Endlosschleife



Numerical Recipes

- Sichere Lösungen zu mathematischen Verfahren findet man in den „Numerical Recipes in C/C++/Fortran/(Java – in Bearbeitung)“



- Das Buch ist abschnittsweise als PDF im Netz verfügbar

Zusammenfassung

- Mathematische Verfahren sind nicht immer leicht zu implementieren, da viele Sonderfälle betrachtet werden müssen.
- Wir haben uns das Newton Verfahren beispielhaft angesehen.
- Einige Lösungen findet man in den Numerical Recipes.