Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

Prof. Dr. J. Boedecker, Prof. Dr. W. Burgard, Prof. Dr. F. Hutter, Prof. Dr. B. Nebel
M. Krawez, T. Schulte
Sommersemester 2018

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 6 — Lösungen

Aufgabe 6.1 (Bedingte Unabhängigkeit)

Sie erhalten einen Beutel mit n fairen Münzen, von denen $n-1$ normal sind, mit einem Kopf auf der einen und einer Zahl auf der anderen Seite, während eine Münze gefälscht ist und auf beiden Seiten Köpfe hat.

(a) Angenommen, Sie greifen in den Beutel, wählen zufällig und gleichverteilt eine Münze aus, werfen sie und erhalten Kopf. Wie hoch ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass Sie die gefälschte Münze gezogen haben?

(b) Angenommen, Sie werfen die Münze insgesamt k-mal, nachdem Sie sie gezogen haben, und erhalten immer Kopf. Wie hoch ist nun die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass Sie die gefälschte Munze gezogen haben?

(c) Angenommen, Sie wollen entscheiden, ob die gewählte Münze die gefälschte ist, indem Sie sie k-mal werfen. Das Entscheidungsverfahren antwortet GEFÄLSCHT, falls alle k Würfe Köpfe zeigen, und NORMAL, sonst. Wie hoch ist die (unbedingte) Wahrscheinlichkeit, dass dieses Verfahren einen Fehler macht?

Aufgabe 6.2 (Bayes-Regel)

In Freiburg sind 80% aller Autos rot. Sie sehen nachts ein Auto, dass ihnen *nicht* rot erscheint. Sie wissen, dass sie ein rotes Auto nur in 70% aller Fälle korrekt erkennen, gegeben das Auto ist rot. Allerdings erkennen sie ein nicht-rotes Auto in 90% der Fälle korrekt.

(a) Listen Sie sämtliche bedingten und nicht-bedingten Wahrscheinlichkeiten, die sich der Aufgabenstellung direkt entnehmen lassen. Hinweis: Unterscheiden Sie zwischen der Aussage, dass ein Auto *rot ist* und der Aussage, dass Sie glauben ein *rotes Auto gesehen* zu haben.

(b) Berechnen Sie mit welcher Wahrscheinlichtkeit das Auto wirklich rot ist, wenn Sie in Freiburg nachts ein Auto als rot wahrnehmen.

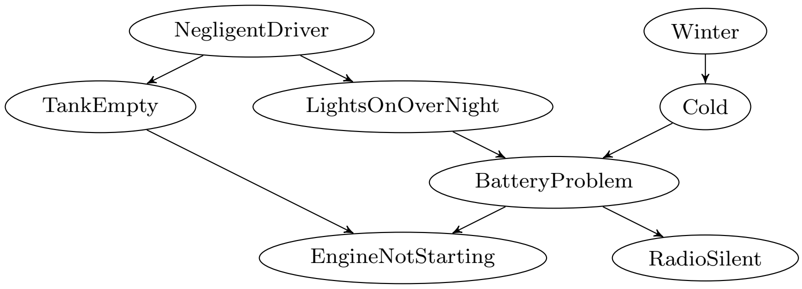
Lösung:

P(R): car is red
P(PR): car is perceived red
$P(R) = 0.8, P(\neg R) = 0.2$
$P(PR|R) = 0.7$

$P(\neg PR|\neg R) = 0.9$

$$
\begin{aligned}
P(R|PR) &= \frac{P(PR|R) \cdot P(R)}{P(PR)} \\
&= \frac{P(PR|R) \cdot P(R)}{P(PR|R) \cdot P(R) + P(PR|\neg R) \cdot P(\neg R)} \\
&= \frac{0.7 \cdot 0.8}{0.7 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.2} \\
&= \frac{0.56}{0.56 + 0.02} = \frac{0.56}{0.58} = \frac{28}{29}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.3 (Bayessche Netze)
Betrachten Sie das folgende Bayessche Netz:



(a) Bestimmen Sie, welche der folgenden bedingten Unabhängigkeiten aus der Struktur des Bayesschen Netzes folgen (dabei steht $\mathit{Ind}(U, V \mid W)$ dafür, dass U bedingt unabhängig von V gegeben W ist, und $\mathit{Ind}(U, V)$ für die unbedingte Unabhängigkeit von U und V).

(i) $\mathit{Ind}(\mathit{Cold}, \mathit{Winter})$
(ii) $\mathit{Ind}(\mathit{Winter}, \mathit{NegligentDriver})$
(iii) $\mathit{Ind}(\mathit{Winter}, \mathit{RadioSilent} \mid \mathit{BatteryProblem})$
(iv) $\mathit{Ind}(\mathit{Winter}, \mathit{EngineNotStarting} \mid \mathit{BatteryProblem})$
(v) $\mathit{Ind}(\mathit{Cold}, \mathit{NegligentDriver} \mid \mathit{RadioSilent})$

Lösung:

Wir wissen, dass (a) ein Knoten bedingt unabhängig ist von seinen Nicht-Nachfolgern gegeben seine Eltern, und dass (b) ein Knoten unabhängig von allen anderen Knoten ist gegeben seine *Markov blanket*, also seine Eltern, Kinder und die anderen Eltern seiner Kinder.

(i) Gilt nicht. Intuitiv (und bei entsprechenden bedingten Wahrscheinlichkeitstabellen an den Knoten) sollte die Wahrscheinlichkeit für *Cold* steigen, wenn *Winter* wahr ist.
(ii) Gilt, denn die Menge der Eltern von *Winter* ist leer, und *NegligentDriver* gehört zu den Nicht-Nachfolgern von *Winter*.
(iii) Gilt, denn die *Markov Blanket* von *RadioSilent* besteht gerade aus *BatteryProblem*, und *Winter* liegt außerhalb davon.
(iv) Gilt nicht. Beispiel (unter Annahme von „intuitiven" bedingten Wahrscheinlichkeitstabellen an den Knoten): Angenommen, *BatteryProblem* ist als wahr gegeben. Dann kann Information über *Winter* trotzdem unseren Belief über *EngineNotStarting* beeinflussen, denn wüssten wir etwa, dass *Winter* falsch ist, denn ist wahrscheinlich auch *Cold* falsch, aber weil *BatteryProblem* wahr ist, muss wahrscheinlich *LightsOnOverNight* und damit *NegligentDriver* wahr sein. Damit erhöht sich die Wahrscheinlichkeit für *TankEmpty* und damit auch für *EngineNotStarting*.
(v) Gilt nicht. Argumentation ähnlich wie bei (iv), d.h. wenn etwa *RadioSilent* wahr ist, ist auch *BatteryProblem* wahrscheinlich. Ist nun aber etwa *Cold* falsch, dann „muss es an *LightsOnOverNight*" liegen. Also wahrscheinlich *NegligentDriver*. *Hier noch ein wenig auf die spezielle Situation mit Head-to-Head-Meetings eingehen.*

(b) Berechnen Sie $P(\mathit{EngineNotStarting} | \mathit{NegligentDriver}, \neg \mathit{Cold})$. Dabei seien die relevanten Einträge in den bedingten Wahrscheinlichkeitstabellen wie folgt gegeben:

$$
\begin{aligned}
P(\mathit{LightsOnOverNight}|\mathit{NegligentDriver}) &= 0.3\\
P(\mathit{LightsOnOverNight}|\neg \mathit{NegligentDriver}) &= 0.02\\
P(\mathit{TankEmpty}|\mathit{NegligentDriver}) &= 0.1\\
P(\mathit{TankEmpty}|\neg \mathit{NegligentDriver}) &= 0.01\\
P(\mathit{BatteryProblem}|\mathit{Cold}, \mathit{LightsOnOverNight}) &= 0.9\\
P(\mathit{BatteryProblem}|\mathit{Cold}, \neg \mathit{LightsOnOverNight}) &= 0.2\\
P(\mathit{BatteryProblem}|\neg \mathit{Cold}, \mathit{LightsOnOverNight}) &= 0.8\\
P(\mathit{BatteryProblem}|\neg \mathit{Cold}, \neg \mathit{LightsOnOverNight}) &= 0.01\\
P(\mathit{EngineNotStarting}|\mathit{BatteryProblem}, \mathit{TankEmpty}) &= 0.9\\
P(\mathit{EngineNotStarting}|\mathit{BatteryProblem}, \neg \mathit{TankEmpty}) &= 0.7\\
P(\mathit{EngineNotStarting}|\neg \mathit{BatteryProblem}, \mathit{TankEmpty}) &= 0.8\\
P(\mathit{EngineNotStarting}|\neg \mathit{BatteryProblem}, \neg \mathit{TankEmpty}) &= 0.05
\end{aligned}
$$

(c) Listen Sie alle Knoten in der Markov-Blanket für den Knoten *LightsOnOverNight*.

Lösung:

Am einfachsten ist in diesem Fall, die Wahrscheinlichkeiten von oben nach unten auszurechnen. Es sind

$$
\begin{aligned}
P(L|N, \neg C) &= 0.3\\
P(T|N, \neg C) &= 0.1\\
P(B|N, \neg C) &= P(L|N, \neg C) \cdot P(B|L, \neg C) +\\
&\qquad P(\neg L|N, \neg C) \cdot P(B|\neg L, \neg C)\\
&= 0.3 \cdot 0.8 + 0.7 \cdot 0.01 = 0.247
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
P(E|N, \neg C) = {} & P(B|N, \neg C) \cdot P(T|N, \neg C) \cdot P(E|B, T) +\\
& P(B|N, \neg C) \cdot P(\neg T|N, \neg C) \cdot P(E|B, \neg T) +\\
& P(\neg B|N, \neg C) \cdot P(T|N, \neg C) \cdot P(E|\neg B, T) +\\
& P(\neg B|N, \neg C) \cdot P(\neg T|N, \neg C) \cdot P(E|\neg B, \neg T)\\
= {} & 0.247 \cdot 0.1 \cdot 0.9 + 0.247 \cdot 0.9 \cdot 0.7 +\\
& 0.753 \cdot 0.1 \cdot 0.8 + 0.753 \cdot 0.9 \cdot 0.05\\
= {} & 0.02223 + 0.15561 + 0.06024 + 0.033885 = 0.271965 \approx 27\%
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.4 (Value-Iteration-Algorithmus)

Betrachten Sie die folgende Gitterwelt. Die u-Werte stehen für den Nutzen eines Zustandes, nachdem die *Value Iteration* konvergiert ist, r für die Belohnung, die ein Zustand erbringt. Nehmen Sie einen Discountfaktor $\gamma = 1$ an. Der Agent kann vier mögliche Aktionen ausführen: **Nord**, **Süd**, **Ost** und **West**. Mit Wahrscheinlichkeit 0,7 erreicht der Agent den Zustand, den er erreichen will, mit Wahrscheinlichkeit 0,2 bewegt er sich nach rechts und mit Wahrscheinlichkeit 0,1 nach links von der beabsichtigten Richtung.

$u = 8$	$u = 15$	$u = 12$
$u = 2$	$r = 2$	$u = 10$
$u = 7$	$u = 16$	$u = 11$

Welches ist die beste Aktion, die ein Agent ausführen kann, der sich im zentralen Zustand der Gitterwelt aufhält? Erklären Sie Ihre Antwort. Welchen Nutzen hat der zentrale Zustand damit?

Lösung:

Sei s der zentrale Zustand. Wir müssen für jede Aktion a den erwarteten Nutzen der Anwendung von a in s berechnen und dann die Aktion mit dem höchsten erwarteten Nutzen auswählen. Der erwartete Nutzen ist

$$\sum_{s'} T(s, a, s')U(s').$$

Konkret bedeutet das hier:

$$\begin{aligned}
\sum_{s'} T(s, \mathbf{Ost}, s')U(s') &= 0{,}7 \cdot 10 + 0{,}2 \cdot 16 + 0{,}1 \cdot 15 = 7 + 3{,}2 + 1{,}5 = 11{,}7 \\
\sum_{s'} T(s, \mathbf{Süd}, s')U(s') &= 0{,}7 \cdot 16 + 0{,}2 \cdot 2 + 0{,}1 \cdot 10 = 11{,}2 + 0{,}4 + 1 = 12{,}6 \\
\sum_{s'} T(s, \mathbf{West}, s')U(s') &= 0{,}7 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 15 + 0{,}1 \cdot 16 = 1{,}4 + 3 + 1{,}6 = 6 \\
\sum_{s'} T(s, \mathbf{Nord}, s')U(s') &= 0{,}7 \cdot 15 + 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}1 \cdot 2 = 10{,}5 + 2 + 0{,}2 = 12{,}7
\end{aligned}$$

Also ist die beste Aktion $\arg\max_a \sum_{s'} T(s, a, s')U(s')$ ist also **Nord**. Der zentrale Zustand hat damit Nutzen $2 + 12{,}7 = 14{,}7$.

Aufgabe 6.5 (Policy-Iteration-Algorithmus)

Sei nun der Discount $\gamma = 0{,}5$ und die einzigen Aktionen seien **Ost** und **West**. Mit Wahrscheinlichkeit 0,9 erreicht der Agent den Zustand, den er erreichen will (bzw. bleibt stehen, falls die Aktion ihn über den Rand des Gitter hinausführen würde), und mit Wahrscheinlichkeit 0,1 bewegt er sich in die entgegengesetzte Richtung. Die Belohnung in den drei westlichen Zuständen ist jeweils $-0{,}05$.

s_0	s_1	s_2	s_3
$\longleftarrow$	$\longleftarrow$	$\longleftarrow$	$r = +1$

Führen Sie einen Schritt der *Policy Iteration* durch, wobei die initiale Policy π_0 durch die Pfeile in den Zuständen gegeben ist. Geben Sie das lineare Gleichungssystem für die erste *Policy Evaluation* und eine Lösung des Gleichungssystems sowie die erste verbesserte Policy π_1 an.

Lösung:
Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
U(s_0) &= -0.05 + 0.5(0.9U(s_0) + 0.1U(s_1)) \\
U(s_1) &= -0.05 + 0.5(0.9U(s_0) + 0.1U(s_2)) \\
U(s_2) &= -0.05 + 0.5(0.9U(s_1) + 0.1U(s_3))
\end{aligned}$$

bzw., ausmultipliziert:

$$\begin{aligned}
U(s_0) &= -1/11 + 1/11U(s_1)) \\
U(s_1) &= -1/20 + 9/20U(s_0) + 1/20U(s_2) \\
U(s_2) &= 9/20U(s_1)
\end{aligned}$$

Löst man dieses Gleichungssystem, so erhält man:

$$\begin{aligned}
U(s_0) &= -\frac{411}{4121} \approx -0,0997 \\
U(s_1) &= -\frac{400}{4121} \approx -0,0971 \\
U(s_2) &= -\frac{180}{4121} \approx -0,0437
\end{aligned}$$

Die erste verbesserte Policy ist also

$$\begin{aligned}
\pi_1(s_0) &= \textbf{Ost} \\
\pi_1(s_1) &= \textbf{Ost} \\
\pi_1(s_2) &= \textbf{Ost}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.6 (Entscheidungsbaum-Lernen)

Zwei Kandidaten O und M, die mit ihren Programmen unterschiedliche Teile der Bevölkerung ansprechen, bewerben sich um ein politisches Amt. Die folgende Tabelle zeigt die Präferenzen von sieben Wählern mit unterschiedlichem Alter, Einkommen und Bildungshintergrund.

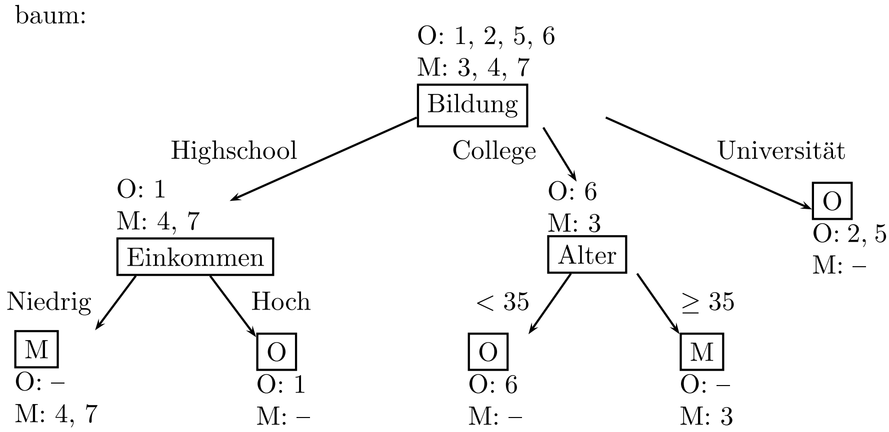
Nr.	**Alter**	**Einkommen**	**Bildung**	**Kandidat**
1	≥ 35	Hoch	Highschool	O
2	< 35	Niedrig	Universität	O
3	≥ 35	Hoch	College	M
4	≥ 35	Niedrig	Highschool	M
5	≥ 35	Hoch	Universität	O
6	< 35	Hoch	College	O
7	< 35	Niedrig	Highschool	M

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Lernalgorithmus aus der Vorlesung einen möglichst kleinen Entscheidungsbaum, der alle gegebenen Beispiele anhand der Attribute *Alter*, *Einkommen* und *Bildung* korrekt danach klassifiziert, welcher Kandidat bevorzugt wird. Geben Sie für den Wurzelknoten die *information gains* aller Kandidaten-Attribute an.

(b) Leiten Sie aus dem Entscheidungsbaum eine logische Formel ab, die genau dann erfüllt ist, wenn Kandidat O bevorzugt wird.

Lösung:

(a) Der Algorithmus aus der Vorlesung findet den folgenden Entscheidungsbaum:



Da am Wurzelknoten vier zu drei Einträge stehen, also $\frac{p}{p+n} = \frac{4}{7}$, $\frac{n}{p+n} = \frac{3}{7}$, ist der Informationsgehalt am Wurzelknoten $I(\frac{p}{p+n}, \frac{n}{p+n}) = I(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}) \approx 0{,}985$. Die möglichen Attribute für die erste Verzweigung sind *Alter*, *Einkommen* und *Bildung*.

Verzweigung nach *Alter*:

$$\begin{aligned} R(\mathit{Alter}) &= \underbrace{\frac{3}{7} \cdot I(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})}_{\mathit{Jung}(<35)} + \underbrace{\frac{4}{7} \cdot I(\frac{2}{4}, \frac{2}{4})}_{\mathit{Alt}(\geq 35)} \\ &\approx 0{,}394 + 0{,}571 = 0{,}965 \\ \mathit{Gain}(\mathit{Alter}) &\approx 0{,}985 - 0{,}965 = 0{,}020 \end{aligned}$$

Verzweigung nach *Einkommen*:

$$\begin{aligned}
R(\mathit{Einkommen}) &= \underbrace{\frac{4}{7} \cdot I(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})}_{\mathit{Hoch}} + \underbrace{\frac{3}{7} \cdot I(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})}_{\mathit{Niedrig}} \\
&\approx 0{,}464 + 0{,}394 = 0{,}857 \\
\mathit{Gain}(\mathit{Einkommen}) &\approx 0{,}985 - 0{,}857 = 0{,}128
\end{aligned}$$

Verzweigung nach *Bildung*:

$$\begin{aligned}
R(\mathit{Bildung}) &= \underbrace{\frac{3}{7} \cdot I(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})}_{\mathit{Highschool}} + \underbrace{\frac{2}{7} \cdot I(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}_{\mathit{College}} + \underbrace{\frac{2}{7} \cdot I(\frac{2}{2}, \frac{0}{2})}_{\mathit{Universität}} \\
&\approx 0{,}394 + 0{,}286 + 0 = 0{,}679 \\
\mathit{Gain}(\mathit{Bildung}) &\approx 0{,}985 - 0{,}679 = 0{,}306
\end{aligned}$$

Wegen $\mathit{Gain}(\mathit{Bildung}) > \mathit{Gain}(\mathit{Einkommen}) > \mathit{Gain}(\mathit{Alter})$ liefert also ein Test bzgl. *Bildung* den größten Informationsgewinn, man sollte also am Wurzelknoten zuerst bzgl. *Bildung* testen.

(b)

$$\begin{aligned}
O \quad \equiv \quad & \mathit{Bildung} = \mathit{Universität} \vee \\
& (\mathit{Bildung} = \mathit{College} \wedge \mathit{Alter} < 35) \vee \\
& (\mathit{Bildung} = \mathit{Highschool} \wedge \mathit{Einkommen} = \mathit{Hoch})
\end{aligned}$$